

Problem Set #1

맥스웰 방정식과 게이지 대칭성

물리는 자연현상을 소수의 기본원리로 통합적으로 이해하는 방향으로 발전되었다. 예로 전자기와 광학 현상을 하나의 이론 틀로 통일한 맥스웰의 전자기 방정식으로 기술이 되는 전자기학을 꼽을 수 있다.

$$\partial_i E^i = \rho, \quad \epsilon^{ijk} \partial_j B_k = J^i + \frac{\partial E^i}{\partial t}, \quad \partial_i B^i = 0, \quad \epsilon^{ijk} \partial_j E_k = -\frac{\partial B^i}{\partial t} \quad (1)$$

단, $i, j, k = 1, 2, 3$ 이고 $\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$ 인 단위계를 사용했다.

1. 맥스웰 방정식에서 전하량 보존 법칙을 유도하라.
2. 전기장 E^i 을 스칼라 포텐셜 ϕ 와 벡터포텐셜 A_i 로 표현하라. (단, 자기장 $B^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k$ 로 정의.)
3. 맥스웰 방정식은 다음과 같은 게이지 변환에 대하여 불변임을 보여라.

$$A^i \rightarrow A^{i'} = A^i - \partial^i \lambda \quad \text{and} \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (2)$$

4. 맥스웰 방정식을 스칼라 포텐셜과 벡터포텐셜에 관한 방정식으로 표현하라.

맥스웰 방정식과 특수 상대론

아인슈타인은 움직이는 물체의 전기역학에 관한 연구를 통해 시공간이 4차원 로렌츠 대칭성을 가짐을 밝혀냈다. 맥스웰 방정식이 로렌츠 대칭성에 대해 공변함을 즉 형태가 바뀌지 않음을 알아보자.

1. $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ 은 앞 문제에서 얻은 게이지 변환식 (2)에 불변임을 증명하라. (단, $A^\mu = (\phi, A^i)$ 이고, $\mu = 0, 1, 2, 3$ 은 4차원 시공간 표지다.) 또 $F_{\mu\nu}$ 가 다음 방정식을 항상 만족함을 보여라.

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0 \quad (1)$$

2. 전기장과 자기장이 $F_{\mu\nu}$ 의 성분으로 표현됨을 보여라. 그리고 위의 방정식이 식 (1)의 3과 4번째 맥스웰 방정식과 동일함을 보여라.
3. $F_{\mu\nu}$ 와 관련해 2계 미분항까지 포함하는 로렌츠 불변량은 다음의 두가지 임을 보여라.

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{and} \quad \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2)$$

(여기서, $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ 로 정의됨.) 또한, 두 번째 불변량은 전미분(total derivative)임을 보여라.

4. 위의 로렌츠불변량으로부터 다음과 같은 맥스웰 전자기장에 대한 작용자(Action)을 얻을 수 있다.

$$S_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \int d^4x A_\mu J^\mu \quad (3)$$

최소작용원리를 이용하여 장방정식을 유도해 그 방정식이 다른 아닌 맥스웰 방정식임을 보여라.

Problem Set #2

LEPI과 SLC에서 Z보존 생성과 붕괴를 통한 전기약작용 이론의 검증

유럽 CERN의 LEP과 미국 SLAC의 SLD실험은 전자와 양전자의 충돌을 통한 Z 보존의 생성과 두 페르미온 입자쌍 $f\bar{f}$ ($f = b, c, s, u, d, e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$)로의 붕괴과정

$$e^-(k, \sigma) + e^+(\bar{k}, \bar{\sigma}) \rightarrow Z \rightarrow f(p, \lambda) + \bar{f}(\bar{p}, \bar{\lambda}) \quad (1)$$

을 정밀하게 연구하였다. [$\sigma, \bar{\sigma}, \lambda, \bar{\lambda}$ 는 각 입자의 1/2단위의 헬리시티(helicity)다.] 전자와 페르미온 질량은 Z 보존 질량에 해당하는 약 91 GeV의 충돌에너지에 비해 매우 작으므로 무시한다. 전기약작용이론에 따르면 Z 보존과 f의 상호작용은

$$\mathcal{L}_{Zff} = -g_Z \bar{f} \gamma_\mu (C_L^f P_L + C_R^f P_R) f Z^\mu \quad \text{with} \quad C_L^f = I_3^f - Q_f \sin^2 \theta_W, C_R^f = -Q_f \sin^2 \theta_W \quad (2)$$

로 기술된다. Q_f 는 양성자 전하를 단위로 한 페르미온의 전하(예를 들어 전자는 -1)이고 I_3^f 는 $u, c, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ 에 대해서는 1/2이고 d, s, b, e, μ, τ 에 대해서는 -1/2로 주어진다. 또한 $P_{L,R}$ 는 각각 $(1 \mp \gamma_5)/2$ 로 카이랄 투사 연산자라 불린다.

1. 각 페르미온 입자의 C_L^f 와 C_R^f 값을 $\sin^2 \theta_W = 0.23$ 을 택하여 계산하라.
2. 전자를 왼쪽/오른쪽 편극시킨 상태로 Z 보존을 생성하여 얻은 편극 비대칭량

$$A_{LR}^e = \frac{\sigma(e_L^- e^+ \rightarrow Z) - \sigma(e_R^- e^+ \rightarrow Z)}{\sigma(e_L^- e^+ \rightarrow Z) + \sigma(e_R^- e^+ \rightarrow Z)} \quad (3)$$

을 측정할 수 있다. 이 편극 비대칭량 A_{LR}^e 을 $C_{L,R}^e$ 로 표현하고 그 값을 구체적으로 구하라.

3. 생성된 페르미온의 전자의 운동량 방향에 대한 산란각을 고려하여 앞쪽과 뒤쪽으로 산란되는 비율의 비대칭성 A_{FB} 을 측정할 수 있다. 이 앞/뒤 비대칭량(FB asymmetry)을 구하고 산란각을 측정할 수 있는 각각의 페르미온에 대하여 그 값을 계산하라.
4. Z 보존 붕괴에 의해서 생성된 입자가 τ 경입자이면 이 τ 입자의 붕괴과정을 통하여 τ 입자의 편극을 측정할 수 있다. 이를 통하여 측정할 수 있는 편극 비대칭성을 정의하고 계산하라.
5. 위의 다양한 독립적인 방법에 의해 전자기약작용의 중요한 물리량인 $\sin^2 \theta_W$ 를 측정할 수 있다. 각각의 측정실험의 CERN과 SLAC에서 진행 과정을 자료 검색하여 상세하게 알아 보아라.

Problem Set #3

LEP에서 힉스스트랄롱 과정을 통한 힉스입자 탐색

힉스보존의 탐색은 현재 모든 고에너지 소립자 실험의 가장 커다란 존재이유이다. 이와 관련하여 힉스보존의 생성과 붕괴과정의 상세한 이해는 중요하다. 현재까지의 탐색과 관련된 전자-양전자 충돌을 통한 표준모형 힉스보존의 생성과정 중의 하나는 소위 힉스스트랄롱(Higgstrahlung)이라 불리는

$$e^+e^- \rightarrow ZH$$

이고 힉스보존의 질량이 200 GeV 이하인 경우는 그 질량에 따라 그 중요도가 달라지는 주요 힉스 붕괴 과정은

$$H \rightarrow f\bar{f} \quad [f = b, \tau, c, \dots]$$
$$H \rightarrow W^+W^-, ZZ$$

이다. 강의 노트에 주어진 파인만 규칙들을 참조하여 다음 문제들을 해결하라.

1. 힉스스트랄롱과정의 Z 보손 입자의 산란각 θ 에 대한 미분 산란단면적

$$\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow ZH)}{d\cos\theta}$$

를 계산하고 그 단면적의 충돌에너지와 산란각에 대한 의존성을 논하라.

2. 위 세가지 붕괴모드의 붕괴너비(Decay width)

$$\Gamma(H \rightarrow f\bar{f})$$
$$\Gamma(H \rightarrow W_T^+W_T^-)$$
$$\Gamma(H \rightarrow W_L^+W_L^-)$$
$$\Gamma(H \rightarrow ZZ)$$

를 각자 계산해 각 붕괴너비가 힉스 질량과 붕괴로 생성된 입자의 질량에 어떻게 의존하는지 조사하라. 여기서 T 와 L 은 W 입자가 횡(transverse)편극과 종(longitudinal)편극되어 있음을 나타낸다.

3. 힉스입자 붕괴로 생성된 입자의 수명도 매우 짧아 검출기안에서 생성되자마자 바로 붕괴하기도 한다. 이때 힉스입자가 생성되고 특정모드로 붕괴되었음을 실험적으로 어떻게 규명할 수 있는가?

Problem Set #4

초대칭 입자의 질량 측정

LHC의 pp 충돌에너지가 14 TeV나 되어 강한상호작용하는 매우 질량이 큰 초대칭 입자도 다량 생성될 수 있다. 이런 입자는 생성직후에 여러 단계의 연쇄 2체 붕괴과정을 통해 더 가벼운 입자로 붕괴하는 과정을 밟게 된다. 이 경우 다양한 조합의 불변질량(invariant mass) 분포를 측정/조사하여 새로운 입자의 질량을 결정할 수 있게 된다. 질량이 어떻게 결정될 수 있는 지 알아 보기 위해 구체적으로 다음 문제를 풀어보자.

1. 쿼크의 초대칭 짝인 초쿼크는 다음과 같이 연쇄 붕괴 과정

$$\tilde{q}_L \rightarrow q + \tilde{\chi}_2^0 \rightarrow q + (\ell^\pm \tilde{\ell}_R^\mp) \rightarrow q + ([\ell^+ \ell^-] + \tilde{\chi}_1^0)$$

을 밟아 최종적으로 쿼크와 경입자쌍 그리고 검출되지 않는 가장 가벼운 뉴트랄리노로 붕괴한다. 상대론적 운동학(relativistic kinematics)을 잘 활용하여 경입자쌍 불변질량 $m_{\ell\ell}$ 의 최대값과 최소값을 구하고 그 결과를 물리적으로 논하라.

2. 위와 동일한 연쇄반응 과정을 고려해 이번에는 첫 번째 붕괴에서 나온 쿼크와 두 번째 붕괴과정에서 나온 경입자의 불변질량 $m_{q\ell^\pm}$ 의 분포를 구하고 그 결과의 물리적 의미를 논하라
3. 전자-양전자 가속기에서는 총 질량중심 에너지 \sqrt{s} 가 고정되어 있다. 따라서 전자-양전자 충돌을 통해 생성된 초뮤온 $\tilde{\mu}_R^\pm$ 입자쌍의 각 에너지도 고정되어 있다. 초뮤온 $\tilde{\mu}_R$ 은 거의 대부분 2체붕괴를 통해 뮤온과 가장 가벼운 뉴트랄리노 $\tilde{\chi}_1^0$ 로 붕괴한다.

$$e^+ e^- \rightarrow \tilde{\mu}_R^+ \tilde{\mu}_R^- \rightarrow (\mu^+ \tilde{\chi}_1^0) (\mu^- \tilde{\chi}_1^0)$$

위 초뮤온 쌍 생성과 붕괴과정을 통해 최종적으로 생성된 뮤온의 에너지 분포를 구하고, 그 최대값과 최소값으로부터 초뮤온 $\tilde{\mu}_R$ 과 뉴트랄리노 $\tilde{\chi}_1^0$ 의 질량을 정밀하게 결정할 수 있음을 보여라.

Problem Set #5

W 보손 질량 : 횡질량(transverse mass)과 야코비안 피크(Jacobian peak)

전기약작용이론(electroweak theory)가 예측한 W^\pm 와 Z 보손의 존재는 1983년 CERN에서 양성자-반양성자충돌을 이용한 UA1 과 UA2 실험에서 발견되었다 (1984년 노벨 물리학상: 루비아와 반데어미어). 이 실험은 W 보손의 질량을 측정하기 위해 쿼크와 반쿼크의 충돌을 통한 W^+ 보손의 생성과 붕괴과정을

$$q + \bar{q}' \rightarrow W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e \quad (1)$$

을 정밀하게 연구하였다.

1. 위와 같이 W 보손이 렙톤으로 2체 붕괴할 때 전자의 횡운동량 크기 P_{eT} 에 대한 미분단면적이 다음과 같음을 보이고 처음 나타나는 야코비 항의 특이성(singularity)을 고려하여 운동량에 대한 사건분포를 개략적으로 예측해 보시오.

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dP_{eT}} = \frac{4P_{eT}}{s\sqrt{1-4P_{eT}^2/s}} \cdot \frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\theta^*} \quad (2)$$

여기서 $P_{eT}(\equiv |\vec{P}_e| \sin\theta^*)$ 와 θ^* 는 각각 두 경입자의 질량중심계에서의 전자의 횡운동량(transverse momentum) 크기와 극각(polar angle)을 나타낸다.

2. W 보손 붕괴 시에 보이는 두 경입자 운동량 중에 실제로 관측 가능한 것이 무엇인지를 밝히고, Z 보손의 질량 측정방법과 비교하여 W 보손의 질량 측정에는 어떠한 차이점이 있는지를 논하라.
3. 실제 W 보손이 붕괴할 때 다음과 같이 정의된 두 경입자 횡질량(transverse mass)의 최대값이 W 보손 질량과 같음을 보여라.

$$m_{e\nu T}^2 = (E_{eT} + E_{\nu T})^2 - (\vec{P}_{eT} + \vec{P}_{\nu T})^2 \leq m_W^2 \quad (3)$$

4. 생성된 W 보손의 횡운동량 크기 P_{WT} 가 영이 아닌 다음과 같은 반응과정을 고려해 보자.

$$q + \bar{q}' \rightarrow W^+ X \rightarrow e^+ \nu_e + X \quad (4)$$

이러한 경우, 1번 문항에 주어진 야코비안 피크를 갖는 P_{eT} 분포는 δP_{WT} 의 영향으로 흐트러지게 되어 P_{eT} 분포만으로 W 보손의 질량을 정확하게 측정하기 어렵다. 이때 P_{eT} 와 $m_{e\nu T}^2$ 에 미치는 δP_{WT} 의 영향을 로렌츠 추진변환(boost)를 통해 근사적으로 계산해 $\delta m_{e\nu T}^2 \sim (\delta P_{WT}/E_W)^2$ 임을 보이고 그 결과 횡질량 $m_{e\nu T}$ 가 P_{eT} 에 비해 δP_{WT} 에 덜 민감함을 확인하라.

5. 반응과정 (1)에 대한 경입자 횡질량 분포가 다음과 같이 주어짐을 보여라.

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dm_{e\nu T}^2} = \frac{|V_{qq'}|^2 G_F^2}{8\pi} \cdot \frac{m_W^4}{(s - m_W^2)^2 + m_W^2 \Gamma_W^2} \cdot \frac{(2 - m_{e\nu T}^2/s)}{\sqrt{1 - m_{e\nu T}^2/s}} \quad (5)$$

여기서 $V_{qq'}$ 와 G_F 는 각각 CKM 행렬의 $[qq']$ 성분과 페르미 상수를 나타낸다.