I. ε을 구하는 과정

⊙ 연습시간에 증명한 내용의 간단한 요약:

- $\gamma^{\mu\dagger} = (-1)^{t+1} A \gamma^\mu A^{-1}$, $A^2 = AA^\dagger = 1$,
  $A = \sqrt{(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}}\, \gamma^{1\cdots t}$ or $\gamma^{(d+1)} \sqrt{(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}}\, \gamma^{1\cdots t}$

- $\pm \gamma^{\mu *} = B_\pm \gamma^\mu B_\pm^{-1}$, $B_\pm^* B_\pm = \varepsilon_\pm$, $B_\pm B_\pm^\dagger = 1$

- $\gamma^{\mu T} = \zeta C_\zeta \gamma^\mu C_\zeta^{-1}$, $\zeta \equiv \pm(-1)^{t+1}$, $C_\zeta = B_\pm^T A$, $C_\zeta C_\zeta^\dagger = 1$
  $C_\zeta^T = \varepsilon_\pm \zeta^t (-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}$

  $C_n^T = \chi C_n$, $C_n \equiv C_\zeta \gamma^{\mu_1 \cdots \mu_n}$

  $\chi \equiv \varepsilon_\pm \zeta^{t+n} (-1)^{\frac{t(t-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}} = +1$ (sym.) or -1 (anti-sym.)

⊙ 위와 같이 C_n^T를 조사하면 임의의 n에 대해 C_n이 symmetric 이거나 anti-symmetric 이라는걸 알수있고 이 강력한 사실을 이용해 다음과같이 $\varepsilon_\pm$를 구할수 있다.

i) $\{\Gamma^N\}$: indep. and complete & C_ζ : 1-1 map

$\Rightarrow$ $\{C_n\}$: indep. and complete in $2^{\frac{d}{2}} \times 2^{\frac{d}{2}}$

ii) 모든 2x2 matrix의 basis를 $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$로 잡으면 $a, b+c, d$는 symmetic 이고 $b-c$는 antisymmetric 이며 a, d는 diagonal, $b+c$와 $b-c$는 서로 대응시킬수 있다.

똑같은 방식으로 basis를 잡아서 $2^{\frac{d}{2}} \times 2^{\frac{d}{2}}$ matrix에 일반화시키면,

$$\sum_{n=0}^{d}\binom{d}{n}\chi = (\#\text{ of sym.}) - (\#\text{ of anti-sym.})$$

$$= (\#\text{ of indep. diagonal matrices in } 2^{\frac{d}{2}}\times 2^{\frac{d}{2}}) = 2^{\frac{d}{2}}$$

iii) $$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \begin{cases} +1, & \frac{n(n-1)}{2} = 0 \bmod 2 \Leftrightarrow n(n-1) = 0,2 \bmod 4 \\ -1, & \frac{n(n-1)}{2} = 1 \bmod 2 \Leftrightarrow n(n-1) = 1,3 \bmod 4 \end{cases}$$

이런 종류의 계산은 mod 4 로 계산하면 편리하다는걸 알수있고,

$n = 1,2,3,4 \pmod 4$ 일때 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = 1,-1,-1,1 = (\mathrm{Re}+\mathrm{Im})[i^n]$

($\because$ $i^n = i,-1,-i,1$ 이므로 $\mathrm{Re}+\mathrm{Im}$ 를 계산하면 $1,-1,-1,1$ 이다)

iv) $$\sum_{n=0}^{d}\binom{d}{n}\chi = \sum_{n=0}^{d}\binom{d}{n}\zeta^n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,\varepsilon_\pm\zeta^t(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}$$

$$= \varepsilon_\pm\zeta^t(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}\sum_{n=0}^{d}\binom{d}{n}(\mathrm{Re}+\mathrm{Im})[(i\zeta)^n]$$

$$= \varepsilon_\pm\zeta^t(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}(\mathrm{Re}+\mathrm{Im})[(1+i\zeta)^d]$$

$$= \varepsilon_\pm\zeta^t(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}(\mathrm{Re}+\mathrm{Im})[(2i\zeta)^{\frac{d}{2}}] = 2^{\frac{d}{2}}$$ 이므로

$$\varepsilon_\pm = \zeta^t(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}(\mathrm{Re}+\mathrm{Im})[(i\zeta)^{\frac{d}{2}}] = \zeta^t(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}(-1)^{\frac{d(d-2\zeta)}{8}}$$

($\because$ $\frac{d}{2} = 1,2,3,4 \pmod 4$ 일때 $(\mathrm{Re}+\mathrm{Im})[(i\zeta)^{\frac{d}{2}}] = (-1)^{\frac{d(d-2\zeta)}{8}}$

$= \zeta, -1, -\zeta, 1$)

v) 다른 표현도 mod 4 로 계산하면 일치하는지 금방 확인할수있다.

$$\varepsilon_\pm = \zeta^t(-1)^{\frac{t(t-1)}{2}}(-1)^{\frac{d(d-2\zeta)}{8}} = (-1)^{\frac{(s-t)(s-t\pm 2)}{8}}$$

($\frac{d}{2}$ 와 $\frac{s-t}{2}$ 를 mod 4 로 비교하고 $\zeta = \pm(-1)^{t+1}$ 에서 $\pm$ 와

$\varepsilon_\pm$ 의 $\pm$ 모두 $B_\pm$ 의 sign 에서 왔음을 이용한다)

II. Majorana - Weyl Spinor

- Dirac 방정식에서 $\gamma^{(d+1)}(i\partial\!\!\!/-m)\psi = -(i\partial\!\!\!/+m)\gamma^{(d+1)}\psi$

  Weyl condition : $\gamma^{(d+1)}\psi = \psi \Rightarrow \begin{cases} \text{even dim.} \\ m=0 \end{cases}$

- Dirac 방정식의 complex conjugation을 고려하면

  $$[(i\partial\!\!\!/-m)\psi]^* = 0 = (-i\gamma^{\mu *}\partial_\mu - m)\psi^*$$

  $$= \mp B_\pm (i\gamma^\mu \partial_\mu \pm m) B_\pm^{-1}\psi^*$$

  $m \neq 0$ 이면 $B_-^{-1}\psi^*$ 만 같은 방정식을 만족하므로

  Majorana condition : $B_-^{-1}\psi^* = \psi \Rightarrow t-s = 0,6,7 \pmod 8$

  pseudo-Majorana : $\left.\begin{matrix} B_+^{-1}\psi^* = \psi \\ m=0 \end{matrix}\right) \Rightarrow t-s = 0,1,2 \pmod 8$

- Majorana - Weyl :

  일반적으로 $t-s = 0,2,6 \pmod 8$ 일때 Majorana와 Weyl이 모두 존재하지만 $t-s=0 \pmod 8$ 일때만 둘이 일치한다.

  간단히 , $t=1$ 일때 $s=1 \pmod 8$ 이므로 $d = t+s = 2, 10, \cdots$ 에서 Majorana - Weyl Spinor가 존재한다.