

Renormalization (Group) and Effective Theory

Plan

1. Basics of Quantum Field Theory
2. Renormalization
3. Renormalization Group
4. Wilsonian Renormalization Group
5. Effective Field Theory

References

Any Quantum Field Theory text

Basics of Quantum Field TheoryClassical mechanics

$$S = \int dt L \quad : \text{action}$$

$$L = T - V \quad : \text{Lagrangian}$$

$\uparrow$ kinetic energy $\uparrow$ potential energy

- Action of $q(t)$ (least) action principle의 $q(t)$ equation of motion은 $q(t)$ 의 $\delta S = 0$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} : \text{conjugate momenta of } q$$

$$\{q, p\}_{PB} = 1$$

- observables in CM

$$q(t), p(t) \leftarrow \text{이들을 구하는 것은 CM의 q, p 이다}$$

Example

Harmonic oscillator

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Quantum Mechanics

$q, p \rightarrow$ operators in a Hilbert space

$$[q, p] = i\hbar \quad (l=1)$$

Physical states $|\psi\rangle$ satisfy Schrödinger eq.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$$

i.e.,

$$\langle q | \psi(t) \rangle = \int \underbrace{\langle q | e^{-iHt} | q' \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \text{"transformation function"} \\ \text{"evolution kernel"}}} \langle q' | \psi(0) \rangle dq'$$

transformation function $\rightarrow$ 기하학적 공간인 QM을 $\mathbb{R}^2$ 로 보자

• Path integral representation

$$\langle q_2 | e^{-iHt} | q_1 \rangle = \int [Dq] [Dp] e^{i \int_0^t dt L}$$

$$L = p \dot{q} - H(q, p)$$

Classical Field Theory

(e.g. classical electrodynamics)

degree of freedom $\rightarrow \infty$

$$q_i(t) \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

e.g. Harmonic oscillators at position $\vec{x}_i$

$q_i(t)$: amplitude of i -th oscillator at $\vec{x}_i$

change of notation

$$q(i, t)$$

$\downarrow$

$$q(\vec{x}_i, t)$$

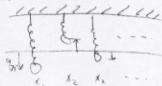
continuum limit

$$q(\vec{x}, t) \quad \text{or} \quad \phi(\vec{x}, t)$$

satisfies e.g. wave equation.

time t 뿐 아니라 space $\vec{x}$ 도 parameter이다

공간이 무한히 많은 harmonic oscillators로 가득 차 있다



Action $S = \int dt L$

Lagrangian

$$L = T - U$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 \rightarrow \frac{1}{2} \int d^3x \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) \right)^2$$

$$U = U(q_1, q_2, \dots) \rightarrow \frac{1}{2} \int d^3x \left[\left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \phi \right)^2 + V(\phi) \right]$$

nearest neighbor
interaction

local interaction
ordinary
Gaussian interaction
is not local

$$\Rightarrow L = \int d^3x \mathcal{L}$$

Lagrangian density

conjugate momenta

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\vec{x}, t)} \quad \{ \phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t) \}_{PB} = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Quantum Field Theory [scalar field theory of ϕ, π]

$\phi \rightarrow$ operator

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = i \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Transformation function

$$x = (t, \vec{x})$$

$$\langle \phi(\vec{x}) | e^{-iHt} | \phi(\vec{x}') \rangle$$

다들 다 다지니 4/12 양은 Green fn $\in \cdot 14$

$$G_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = \langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_N) | 0 \rangle$$

"time-ordered product"

$$T \phi(x) \phi(y) = \begin{cases} \phi(x) \phi(y) & x^0 > y^0 \\ \phi(y) \phi(x) & x^0 < y^0 \end{cases}$$

Note

1. $\phi(x)$: not a well-defined operator
but an operator-valued distribution

$\phi(x)$ 를 어떤 한 점에서 측정할 수는 없고 각각의 space-time region에서 평균을 낸 것만이 의미가 있다. e.g.

$$\phi_f = \int \phi(x) f(x) d^4x, \quad f(x): \text{any complex-valued operator}$$

is an operator

그런데 $[\phi(x)]^2$ 과 같이 distribution의 곱은 잘 정의가 되지 않기 때문에 같은 값이지만 field를 곱한 때는 주의할 것
다루어야 한다. $\Rightarrow$ renormalization.

2. Green fn 들을 다음 식을 만족시키다.

$$\partial_y^2 G_2(y, x) + \langle 0 | T V'(\phi(y)) \phi(x) | 0 \rangle = -i \delta^4(x-y)$$

$$\begin{aligned} \partial_y^2 G_{N+1}(y, x_1, \dots, x_N) + \langle 0 | T V'(\phi(y)) \phi(x_1) \dots \phi(x_N) | 0 \rangle \\ = -i \sum_{j=1}^N \delta(y-x_j) G_{N+1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N) \end{aligned}$$

Green fn을 구하는데 같은 방정식 이 미분방정식을 푸는 것과 마찬가지.

Path-integral representation

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \mathcal{N} \int [D\phi] \phi(x_1) \dots \phi(x_N) e^{iS[\phi]}$$

$$\mathcal{N} = \left[\int [D\phi] e^{iS[\phi]} \right]^{-1} \text{ so that } \langle 0 | 0 \rangle = 1$$

Note path integral에서는 자동적으로 time-ordered product가 된다

• Equivalently, define

$$Z[J] \equiv N \int [D\phi] e^{iS[\phi] + i \int d^4x J(x)\phi(x)}$$

: generating functional of Green fns

$J(x)$: arbitrary function

$$\Rightarrow \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta}{i \delta J(x)} \frac{\delta}{i \delta J(y)} Z[J] \Big|_{J=0}$$

etc.

• Path integral $\int e^{iS} \dots \rightarrow$ oscillating integral

More satisfactory definition is

(i) 'Wick-rotate' time to imaginary value $t \rightarrow -i\tau$

$\Rightarrow$ Euclidean space

$$iS \rightarrow -S_E = - \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + V \right]$$

S_E : positive definite $\Rightarrow$ better convergence

(ii) Space-time $\rightarrow$ lattice e.g. with spacing a

$$\text{Volume of Vol } 4\pi r^2 \times \Delta z \quad |\tau| \leq \frac{T}{2} \quad \Delta\tau$$

$$\Rightarrow \int [D\phi] \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{-S_E[\phi]} : \text{absolutely convergent}$$

ordinary integral over finite
of variables

(iii) Take $\begin{cases} \text{continuum limit } a \rightarrow 0 \\ \text{infinite vol. limit } V \rightarrow \infty \\ \text{infinite time limit } T \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow \exists \text{ difficulties}$

(iv) Analytically continue back to Minkowski space-time.

Step (ii) 7/16/1

- $T \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty$ ("Thermodynamic limit") $\Rightarrow$ divergence appears
 ϕ^4 -theory

$$S(\phi) = \frac{1}{g} \int \left[\frac{1}{2} (\partial \hat{\phi})^2 - \frac{m^2}{2} \hat{\phi}^2 - \frac{1}{4!} \hat{\phi}^4 \right], \quad \hat{\phi} = \sqrt{g} \phi$$

$$\Rightarrow \int [d\phi] e^{-S_E(\phi)} \propto \int [d\hat{\phi}] e^{-\frac{1}{g} S_E[\hat{\phi} \rightarrow \hat{\phi}, g \rightarrow 1]}$$

: temperature $\propto \frac{1}{g} \propto$ classical
 system's partition fun

: "identity bet. Euclidean field theory and
 certain classical Stat. mech"

(continuum limit in field theory) = (particular type of
 2nd order phase transition)

divergence like $e^{-E_0 VT}$ E_0 : ground state energy density
 $\downarrow$
 cancelled by N

- Remaining div. : $a \rightarrow 0$ or $\epsilon \rightarrow 0$ (UV div.)
 $\Rightarrow$ Renormalization

① Free Scalar theory

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (+ \dots)$$

: collection of infinite # of harmonic osc.

eq. of motion : $(\partial^2 + m^2) \phi = 0$: Klein-Gordon eq

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} \quad ; \text{conjugate momentum}$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

Generating Functional

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS + i\int J\phi}$$

$$S + \int J\phi = -\frac{1}{2} \int \phi (\partial^2 + m^2) \phi + \int J\phi$$

$$= -\frac{1}{2} \int \left[\phi - J (\partial^2 + m^2)^{-1} \right] (\partial^2 + m^2) \left[\phi - (\partial^2 + m^2)^{-1} J \right] + \frac{1}{2} \int J (\partial^2 + m^2)^{-1} J$$

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\frac{i}{2} \int \left[\phi - J (\partial^2 + m^2)^{-1} \right] (\partial^2 + m^2) \left[\phi - (\partial^2 + m^2)^{-1} J \right] + \frac{i}{2} \int J (\partial^2 + m^2)^{-1} J}$$

$$\phi - J (\partial^2 + m^2)^{-1} = \tilde{\phi} \quad \text{: integration variable}$$

$$= \underbrace{(\text{const})}_{\int} e^{-\frac{1}{2} \int J D J} + i (\partial^2 + m^2) D = 1$$

$$\text{i.e.} \quad (\partial_x^2 + m^2) D(x-y) = -i \delta(x-y)$$

In mom. space

$$D(x-y) = i \int \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \quad \text{: has ambiguity at } k^2 = m^2$$

Feynman b.c. $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$: corr to multiplying convergence factor

$$e^{-\frac{\epsilon}{2} \phi^2}$$

Then

$$D_F(x-y) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{consistent with Wick rotation})$$

$$\text{"Feynman"} = - \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} Z \Big|_{J=0} = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$$

Problems

1. Consider the real free scalar theory

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

Show that it consists of infinite number of independent harmonic oscillators. Calculate the vacuum energy.

Discuss the nature of the particle of this theory.

2. From the path integral expression of Green fns, derive the equations of Green fns e.g.

$$\partial_y^2 \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \langle 0 | T V'(\phi(y)) \phi(y) | 0 \rangle = -i \delta^4(x-y)$$

and higher Green fns.

3. Show that time-ordered product is automatically taken care of inside a Path integral.

4. Prove the Feynman parametrization formula

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^n}$$

Hint: First consider $\frac{1}{AB^n}$

which can be obtained from the formula for $\frac{1}{AB}$

① Perturbation Theory (ϕ^4 -theory)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2$$

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{g}{4!}\phi^4$$

$$Z[J] = N \int [D\phi] e^{iS_0 + i\int \mathcal{L}_1 + i\int J\phi}$$

$$= N \langle 0 | T e^{i\int \mathcal{L}_1 + i\int J\phi} | 0 \rangle_0 \quad \text{free theory vacuum.}$$

$$N^{-1} = \langle 0 | T e^{i\int \mathcal{L}_1} | 0 \rangle_0$$

Then

$$G_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j \langle 0 | T \overset{\text{free field}}{\phi(x_1) \dots \phi(x_N)} \prod_{j=1}^n \mathcal{L}_1(y_j) | 0 \rangle_0}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \prod_{j=0}^n \int d^4 y_j \langle 0 | T \prod_{j=1}^n \mathcal{L}_1(y_j) | 0 \rangle_0}$$

∴ "Gell-Mann-Low formula"

 $\mathcal{L}$ perturbation w. r. t. g
Note

 1) series is convergent series $\rightarrow$ not asymptotic series

2)

$$G_{N,n} \equiv O(g^n) \rightarrow 0 \text{ as } g \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow |G_N - G_{N,n}| = O(g^{n+1}) \text{ as } g \rightarrow 0, \forall n$$

why?

 $\left(\begin{array}{l} g < 0 \Rightarrow \text{energy : unbounded from below} \\ \Rightarrow \text{vacuum state continued from } g > 0 \text{ is unstable} \end{array} \right.$

Problems

1. Consider the real free scalar theory

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

Show that it consists of infinite number of independent harmonic oscillators. Calculate the vacuum energy.

Discuss the nature of the particle of this theory.

2. From the path integral expression of Green functions, derive the equations of Green functions e.g.

$$\partial_\mu^2 \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \langle 0 | T V'(\phi(y)) \phi(x) | 0 \rangle = -i \delta^4(x-y)$$

and higher Green functions.

3. Show that time-ordered product is automatically taken care of inside a Path integral.

4. Prove the Feynman parametrization formula

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^n}$$

Hint: first consider $\frac{1}{AB^n}$

which can be obtained from the formula for $\frac{1}{AB}$

Wick Theorem

Free theory of ϕ higher-point Green functions $\phi(x_1) \dots \phi(x_n)$ 4-point $\sim \phi^4$.

e.g.

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) | 0 \rangle &= D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) \\ &+ D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4) \\ &+ D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

$$\phi_i = \phi(x_i) \text{ etc}$$

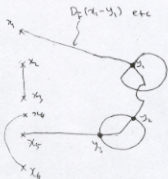
$$\left(i \frac{\delta}{\delta \phi_1} \frac{\delta}{\delta \phi_2} \frac{\delta}{\delta \phi_3} \frac{\delta}{\delta \phi_4} e^{-\frac{1}{2} \int \phi D_F \phi} \right) \rightarrow \text{all possible pairings}$$

Graphically

$$\langle 0 | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | 0 \rangle = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \hline 3 & & 4 \end{array} \\ D_F(x_1 - x_2) \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ | & & | \\ 3 & & 4 \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ \diagdown & & \diagup \\ & \times & \\ \diagup & & \diagdown \\ 3 & & 4 \end{array} \end{array}$$

○ Gell-Mann-Low formula 이 나쁜 것들도 Wick theorem 쓰면
모든 D_F 들은 나타낼 수 있다.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \prod_{j=1}^n \int d^4 y_j \langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \prod_{j=1}^n \left[\frac{\delta}{\delta \phi} \phi(y_j) \right] | 0 \rangle$$



"Feynman diagram"

x_i 이 연결된 것 $\rightarrow$ "external line"
나머지 $\rightarrow$ "internal line"

모든 가능한 pairing 을 다 생각

$$\begin{cases} x_i - x_j \text{ pairing} \\ x_i - y_j \text{ pairing} \\ y_i - y_j \text{ pairing} \end{cases}$$

따라서 다음과 같은 "Feynman rule"을 정한다.

(1) $D_F(x-y)$ for each line where x, y are the positions of the vertices at its end

(2) $-ig$ for each ϕ^4 interaction



$S=2$

(3) A combinatorial factor $1/S$



$S=3!$

(4) necessary integrals (dxy etc)



$S=2 \cdot 2 \cdot 2$

In momentum space,

$$G_N(p_1, \dots, p_N) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_N) = \int d^4x_1 \dots d^4x_N e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_N x_N)} G_N(x_1, \dots, x_N)$$

↑
overall momentum conservation

(1) $\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \equiv D_F(k)$ for a line with mom. k

(2) impose mom. conservation at each vertex

(3) $-ig$

(4) integrals over undetermined internal momenta: $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$

(5) combinatorial factor $1/S$

Example



$$= D_F(p) D_F(q) D_F(r) D_F(s) (-ig) \quad \text{with } p+q+r+s=0$$



$$= D_F(p) D_F(q) D_F(r) D_F(r) (-ig)$$

with $p+q+r-r=0$ i.e. $q=-p$

$$\int \frac{d^4r}{(2\pi)^4}$$



$$= (-ig)^4 \cdot \frac{1}{2} D_F(p) D_F(q) D_F(r) D_F(s) D_F(k) D_F(l)$$

$$l = -q - r - k$$

$$p + q + r + s = 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{ performed.}$$

이 때들에서 볼 수 있듯이 external momenta는 항상 $D_F(p)$ 등을 가리켜 나타낸다. $\Rightarrow$ 이들은 외선에서 쓰리선으로

"amputated" Green fn.

e.g.



$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (-ig) D_F(k)$$



$$= (-ig)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D_F(k) D_F(l) \text{ etc}$$

□ 2-point function (propagator)

$$O(g^0): \text{---}$$

$$O(g^1): \text{---} \bigcirc \text{---}$$

$$O(g^2): \text{---} \bigcirc \text{---}$$

New



$O(g^1)$ 의 곱이다.

$$O(g^3): \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---}$$



etc.

앞방정식에 어떤 diagram 어떤 가중치 인이 하나씩 곱해진 부분을 계산



의 행태를 나타낼 수 있다.

Σ_1

$$G_2(p) = \frac{1}{p^2 - m^2} + \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \dots$$

$$= D_F(p) + D_F(p) \overset{\substack{\uparrow \\ \text{"-i}\Sigma(p)"}}{\text{diagram 1}} D_F(p) + D_F(p) [i\Sigma(p)] D_F(p) [i\Sigma(p)] D_F(p) + \dots$$

$$= D_F(p) \left\{ 1 + [i\Sigma(p)] G_2(p) \right\} \quad \Sigma(p) : \text{"self-energy"}$$

$$G_2(p) \left[\underbrace{\frac{1}{D_F(p)}}_1 + i\Sigma(p) \right] = 1$$

$$\therefore -i(p^2 - m^2 + i\epsilon)$$

$$\therefore G_2(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 - \Sigma(p) + i\epsilon}$$

그러나 $\Sigma(p)$ 는 계산할 수 없다.

↑ 도중에 보자마자 연결된 것이 없는 ^{amputated} diagram

$$O(3): \quad \Omega_+^+ = -ig \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} D_F(k) = -ig \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

divergent as $k \rightarrow \infty \Rightarrow$ "UV divergence"
quadratically

Note $k^0 \approx |k|$ 이면 분모에 momentum의 2차 사승이 quadratic하게
되고, k^0 가 양수일 가능성도 있지만 실제로는 그렇지 않다.
Wick rotation을 통해 Euclidean space로 가변 안전하다.

Wick rotation (i pole이 없게끔 해주기 위해)

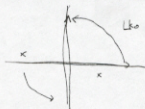
$$t = -i\tau$$

$$\Rightarrow d^4 k = i d^4 k_E$$

$$k^0 = i k_E^0$$

$$k^2 = -k_E^2 = -(k_E^0)^2 + \vec{k}^2$$

$$Q = -\frac{i}{2} i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + m^2 - i\epsilon}$$



해결 방법 : 우선 적분이 수렴하도록 변경.

⇒ "regularization" (physical meaning → later)

• $k \rightarrow \infty$ 인데 발산하므로 UV cut off 를 도입

⇒ cutoff regularization, Pauli-Villars reg.

• 4 차원이 아닌 다른 차원으로

⇒ dimensional regularization : Most convenient.

또는, 발산하는 부분은 계산을 못하므로 그냥 놓아두고 계산을 할 수 있는 부분만 계산.

$$\frac{d}{d(m^2)} \int \frac{1}{k^2 + m^2} = - \int \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} : \log \text{ div.}$$

$$\frac{d^2}{d(m^2)^2} \int \frac{1}{k^2 + m^2} = 2 \int \frac{1}{(k^2 + m^2)^3} : \text{convergent!}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{k^2 + m^2} = A + B m^2 + (\text{finite, well-defined expression})$$

divergent

이 방법을 BPHZ method로 all order renormalizability

증명할 수 있다.

• Dimensional regularization

$$I \equiv \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} \rightarrow \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m^2}$$

$$\text{useful identity } \frac{1}{A} = \int_0^\infty ds e^{-As}$$

Gaussian integral

$$\Rightarrow I = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^\infty ds e^{-(k^2 + m^2)s} = \int_0^\infty ds e^{-m^2 s} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-k^2 s}$$

$$I = \int_0^\infty ds e^{-s^2} \frac{1}{(2\pi)^D} \left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{D}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^\infty ds s^{-D/2} e^{-s^2} \quad \leftarrow \text{Gamma!}$$

$$= \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \quad ; \text{divergent as } D \rightarrow 4$$

$$\text{Let } \varepsilon = 4 - D$$

$$1 - \frac{D}{2} = 1 - \frac{1}{2}(4 - \varepsilon) = -1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Gamma\left(-1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{-1 + \frac{\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{1}{-1 + \frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \Gamma\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$= -\frac{2}{\varepsilon} + \text{finite.}$$

$$\therefore I \approx \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(4\pi)^{D/2}} \left(-\frac{2}{\varepsilon}\right) + \dots$$

$$\text{Then } -i \Sigma(p) = -\frac{ig}{2} \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(4\pi)^{D/2}} \left(-\frac{2}{\varepsilon}\right) + \text{finite.} \equiv \Sigma_{\text{inf}} + \Sigma_{\text{fin}}$$

g : dimensionless in $D=4$

dimensionful in $D \neq 4$

$\Rightarrow$ introduce scale " μ "

$$g \rightarrow g \mu^{4-D} = g e^{(4-D)\ln \mu} = g (1 + \varepsilon \ln \mu + \dots)$$

$\uparrow$
dimensionless

$$\begin{cases} d^D x (\partial \phi)^2 \rightarrow \frac{D-2}{2} = [\phi] \quad (\text{mass dimension}) \\ d^D x g \phi^4 \rightarrow [g] - D + \frac{D-2}{2} \cdot 4 \Rightarrow [g] = 4-D \end{cases}$$

$$[G_2(p)]^{-1} = p^2 - m^2 - \Sigma(p) + i\epsilon$$

$$\Sigma \approx m^2 \text{ at } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4 \text{ and } \Gamma_5, \Gamma_6, \Gamma_7, \Gamma_8$$

$\Rightarrow$ absorb infinity into m^2

$$m_R^2 \equiv m^2 + \Sigma_{\text{inf}}$$

Then $[G_2(p)]^{-1} = p^2 - m^2 - \underbrace{\Sigma_{fin}}_{\text{finite}} + i\epsilon$

즉 m^2 을 finite quantity로 '바꾸었다'

또는, Lagrangian을 바꿀 수도 있다. 본래의 Lagrangian에
 $+\frac{1}{2}\Sigma_{inf}\phi^2$: "Counter term"

을 더한다면 상응하면 m 이 $m^2 - \Sigma_{inf}$ 로 바뀐 것이므로

$$\begin{aligned} [G_2(p)]^{-1} &= p^2 - (m^2 - \Sigma_{inf}) - \Sigma + i\epsilon \\ &= p^2 - m^2 - \underbrace{[\Sigma - \Sigma_{inf}]}_{\Sigma_{fin}} + i\epsilon \quad ; \text{finite.} \end{aligned}$$

이처럼 변신하는 양이 나왔을 때 Lagrangian의 parameter를
 redefine 하여 ($m \rightarrow m^2$) divergence를 없앨 수 있거나 새로운
 항을 더하여 ($\frac{1}{2}\Sigma_{inf}\phi^2$) divergence를 없애는 것을 renormalization
 이라 한다. 이때 더하는 새로운 항이 이미 Lagrangian에 있는
 항들과 같은 모양을 하고 있으면 parameter를 redefine 하는 것과
 마찬가지로 있을 수 있다.

Note

- 여기서도 $\Sigma(p)$ 가 p 에 무관한 상수였지만 이만으로는 p 에 맞지 않다.
- Σ 를 Σ_{inf} 과 Σ_{fin} 으로 나눌 때 정확히 어느것을 Σ_{inf} 로 불러야
 하는지도 모른다. 예를 들면 $\Sigma_{fin} = 0$ 으로 두면 정확히 Σ_{inf} 로 불러
 수도 있다 이러한 모호함이 renormalization group의 기원이다.

2 4-point function.

$$O(g) : X = -ig$$

$$O(g^2) : \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3}$$

$$\begin{aligned} \text{diagram 1} &= \frac{1}{i} (-ig)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(k+p_1+p_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &\equiv (-ig)^2 i V(s) \quad s = (p_1+p_2)^2 \equiv p^2 \end{aligned}$$

$$V(s) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

: logarithmically divergent

Feynman parametrization

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(1-x+y) \frac{1}{(xA+yB)^2}$$

$$V(s) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2xk \cdot p + x^2 p^2 - m^2)^2}$$

$$= \frac{1}{[l^2 + x(1-x)p^2 - m^2]^2}, \quad l = k + xp$$

Wick rotation $\rightarrow \frac{i}{2} i \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[l_E^2 - x(1-x)p^2 + m^2]^2}$

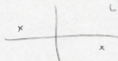
dim. regulator $\rightarrow -\frac{1}{i} \int_0^1 dx \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma(2-\frac{D}{2}) \frac{1}{[m^2 - x(1-x)p^2]^{2-D/2}}$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma - \ln 4\pi - \ln [m^2 - x(1-x)p^2] \right\}$$

앞에서와 마찬가지로 V 는 divergent part와 finite part로 나누어 g 를 redefine 하므로 새로운 term의 Lagrangian이 더하여 ϕ 의 양을 얻게 된다.

Note

Wick rotation을 할 때 $\frac{p^2 + \epsilon}{\text{space-like } p}$ 의 경우를 주의한다.



time-like p 의 경우와 space-like p 의 경우를 구분한다.
Analytically continue 하기 때문이다.

3 Move on 2-point fun

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

앞에서와 같이 $\Sigma(p)$ 가 p 에 depend.

propagator의 pole이 physical mass이다.

$$[G_2(p)]^{-1} = 0 \text{ at } p^2 = m_{ph}^2 \quad (\text{by definition})$$

$$\Rightarrow m_{ph}^2 - m^2 - \Sigma(m_{ph}^2, m^2) = 0$$

finite

divergent

$$\Rightarrow m_{ph}^2 = m^2 + \delta m^2$$

physical renormalization scheme
mass-shell renormalization

where $\delta m^2 = \Sigma(m_{ph}^2, m^2)$: "dynamical contribution to mass"

Expand $\Sigma(p) = \delta m^2 + (p^2 - m_{ph}^2) \Sigma'(m_{ph}^2, m^2) + \tilde{\Sigma}(p)$

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - m_{ph}^2 - (p^2 - m_{ph}^2) \Sigma'(m_{ph}^2, m^2) - \tilde{\Sigma}(p) + i\epsilon}$$

$$= \frac{i}{(p^2 - m_f^2)(1 - \Sigma') - \Sigma + i\epsilon}$$

$$\approx \frac{1}{(1 - \Sigma')} \frac{i}{p^2 - m_f^2 - \tilde{\Sigma} + i\epsilon} \equiv \frac{i Z_f}{p^2 - m_f^2 - \tilde{\Sigma} + i\epsilon}$$

$$Z_f = \frac{1}{1 - \Sigma'} \quad \text{: "wavefn renormalization const"}$$

Define "renormalized field"

$$\phi_R = Z_f^{-1/2} \phi$$

$$\Rightarrow \langle 0 | T \phi \phi | 0 \rangle = Z_f \underbrace{\langle 0 | T \phi_R \phi_R | 0 \rangle}_{\substack{\uparrow \\ \text{finite}}}$$

In summary,

• divergence in self-energy

↳ mass renormalization
↳ wavefn renormalization

• divergence in 4-point fn

→ coupling const. renormalization

⇒ Green fn are finite하미 만들 수 있다.

이러한 것을 1-loop 뿐 아니라 all order에 적용한다

⇒ renormalizability

Unrenormalized original Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{g}{4!} \phi^4$$

"bare Lagrangian" "full Lagrangian"

Redefinition of parameters and fields

$$\phi_R = Z_\phi^{-\frac{1}{2}} \phi$$

$$m_R^2 = m^2 + \delta m^2$$

$$g_R = Z_g^{-1} Z_\phi^2 g$$

Express the bare Lagrangian in terms of renormalized quantities

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{CT}$$

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{2} (\partial \phi_R)^2 - \frac{1}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{g_R}{4!} \phi_R^4 \quad \text{"Renormalized Lagrangian"}$$

$$\mathcal{L}_{CT} = \frac{1}{2} (Z_\phi - 1) (\partial \phi_R)^2 + \frac{1}{2} [(Z_\phi - 1) m_R^2 - \delta m^2 Z_\phi] \phi_R^2 - \frac{1}{4!} g_R (Z_\phi - 1) \phi_R^4$$

"counterterm Lagrangian"

Renormalized Green functions

$$G_2(x, y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = Z_\phi \langle 0 | T \phi_R(x) \phi_R(y) | 0 \rangle = Z_\phi G_{2R}(x, y)$$

$$G_N(x_1, \dots, x_N; m, g) = Z_\phi^{\frac{N}{2}} \underbrace{G_{NR}(x_1, \dots, x_N; m_R, g_R)}_{\text{finite}}$$

In terms of amputated Green functions,

$$G_N^{\text{amp}}(p_1, \dots, p_N; m, g) = \frac{1}{G_2(p_1)} \dots \frac{1}{G_2(p_N)} G_N(p_1, \dots, p_N) = \frac{1}{Z_\phi^{\frac{N}{2}}} Z_\phi^{\frac{N}{2}} G_N^{\text{amp}}(p_1, \dots, p_N)$$

$$= Z_\phi^{\frac{N}{2}} \underbrace{G_{NR}^{\text{amp}}(p_1, \dots, p_N; m_R, g_R)}_{\text{finite}}$$

This is the quantity appearing in scattering matrix

• Alternative viewpoint

저항의 renormalized Lagrangian, 이걸 tree Lagrangian ("tree Lagrangian")

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{2} (\partial \phi_R)^2 - \frac{1}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{g_R}{4!} \phi_R^4$$

이 저항의 perturbation series 로 diagram 들을 계산
 $\Rightarrow$ divergence 가 나타난다.

이 divergence 를 없애기 위해 Lagrangian 에 새로운 항을 더한다
 "Counter term Lagrangian"

1-loop order div. $\rightarrow \mathcal{L}_{CT}^{(1)}$ 을 더해서 없앤다

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{CT}^{(1)} \quad \text{so far}$$

$\mathcal{L}_{\text{new interaction}}$

2-loop order : $\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{CT}^{(1)}$ 으로 2-loop 까지 계산하여 나타는 divergence

$$\mathcal{L}_{CT}^{(2)} \text{ 를 더해서 없앤다}$$

$$\Rightarrow \text{new Lagrangian } \mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{CT}^{(1)} + \mathcal{L}_{CT}^{(2)}$$

계산하면

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{CT} \quad : \text{full Lagrangian}$$

$$\mathcal{L}_{CT} = \mathcal{L}_{CT}^{(1)} + \mathcal{L}_{CT}^{(2)} + \dots$$

이때 divergence 를 없애기 위해 더해주는 $\mathcal{L}_{CT}^{(i)}$ 들이 $\mathcal{L}_R$ 과 같은 구조를 가지고 있으면 많이 경유나 돌아지고 그러하 이들을 renormalizable 하다고 한다. $\mathcal{L}_R$ 에 있는 항을 더해야만 div. 가 사라지는 경우는 non renormalizable 하다고 한다. 즉,

$$\text{renormalizable} \Rightarrow \mathcal{L}_{CT}^{(i)} = \frac{1}{2} \delta Z_{\phi}^{(i)} (\partial \phi)^2 - \frac{1}{2} \delta m^{(i)} \phi^2 - \frac{1}{4!} \delta g^{(i)} \phi^4$$

divergent constants

어떤 diagram이 발산하는가?

UV div $\Rightarrow$ mass & external mom. 무시할 수 있기 때문
 loop mom. k_i 의 power에 따라 결정된다

Naive dimensional argument

dimension of N-point Green fun in mom sp.

$$[G_N(p_1 \dots p_N)] + [\underbrace{S^0(p)}_{-4}] = N [\underbrace{d^4x}_{-4}] + [\underbrace{G_N(x_1 \dots x_N)}_N]$$

$$\Rightarrow [G_N(p)] = -3N + 4$$

amputated Green fun

$$[G_N^{\text{amp}}(p)] = -N [\underbrace{G_2(p)}_{-2}] + [G_N(p)]$$

$$= +2N - 3N + 4 = \underline{4 - N}$$

UV region에서 external mom & mass는 무시할 수 있기 때문

어떤 n-th order Feynman diagram가

$\int^n x$ [complicated integral of loop momenta]
 [without any other dimensionful quantities]

$$\left(\int d^4k_1 d^4k_2 \dots \frac{1}{k_1^2 k_2^2 \dots} \right)$$

$D \geq$ integral의 dimension이라 하면 $\left\{ \begin{array}{l} 3, D = 4 \cdot (\# \text{ of loop mom}) \\ -2 \cdot (\# \text{ of propagators}) \end{array} \right\}$

$$4 - N = n[g] + D$$

$$D = 4 - N - n[g]$$

"superficial degree of divergence"

$D > 0$ 이면 integral이 ultraviolet 발산하는 것이므로

external line이 적을 수록, 그리고 coupling const.이 다.이 적을 수록 발산은 심해져 한다 ϕ^4 theory에서는 $[g]=0$ 이므로

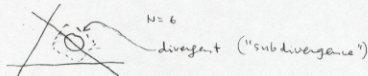
loop order 가 더 올라가면 2-pt function은 $D=2$ 이

divergence를 보이고 4-pt function은 $D=0$ 즉, log divergence를 보인다.

Note

1. $D < 0$ 이라고 해서 항상 수렴하는 것은 아니다.

e.g.



이러한 subdiv.은 전체 diagram의 나머지에서 분리하여 따로 생각할 수 없는 경우가 대부분이다. (exception: overlapping div.)

2. 특별한 경우에는 external momentum이 0으로 갈 때 diagram 자체가 0으로 가며 p^0 [loop integral]

형태로 되는 경우가 많다. 이런 경우는 D 가 positive가 되면 ultraviolet 발산

$D=2$ 이 심해 overall div.이다. (example: gauge theory)

3. coupling const.의 dimension이 divergence여부를 결정하는데 중요함을 알 수 있다. $[g]$ 가 양수이면 2-loop, 3-loop 올라가면서

D 가 항상 음수로 되므로 이런 경우에는 divergent diagram이 없다. 라는 것을 알 수 있다. 하지만 ϕ^4 th.처럼 $[g]=0$ 이면

특히 많은 divergent diagram들이 있다. 하지만 $[g] < 0$ 이면 higher order로 갈수록 심해져 발산하며 점점 더 많은 counterterm들이 필요해진다.

In general, $\exists$ 4 types

"These infinitely clever young people all need to be renormalized"

(i) finite theory

e.g. free theory, some theories with super-symmetry

(ii) super-renormalizable theory

$[g] > 0$ 인 경우.

e.g. ϕ^3 theory in 4D

finite개의 counterterm만 필요

(iii) strictly renormalizable theory

$[g] = 0$ 인 경우

e.g. ϕ^4 th. in 4D, QED, QCD

∞ 개의 counterterm이 필요하지만 그들의 형태가 정해져 있다.

(iv) Nonrenormalizable theory

$[g] < 0$ 인 경우

∞ 개의 counterterm이 필요함 뿐 아니라 그 형태도 모른다

e.g. ϕ^6 theory in 4D, Fermi theory of weak interaction

$g\phi^6$

$[g] = -2$

counterterm으로 ϕ^8, ϕ^{10} 등이 계속 더해져서 ∞ 개

있을 수 있다 $\rightarrow \infty$ # of couplings

(no predictive power)

Note

몇개의 local counterterm만 더해져야 끝나는지 묻는 div.를 없앨 수 있는가?

1-loop: done already, higher-loop?

problem: overlapping divergence

$\text{why} \rightarrow \frac{1}{\epsilon} \ln p^2$!



이는 보통은 divergent한 것인데 어떻게 하면 finite하게 만들 수 있는가

resolution: [BPHZ forest formula] + [Weinberg th.] + [Combinatorics]

See any "advanced" QFT book on renormalization

⊙ Renormalization scheme

Traditional view on renormalization:

renormalization = procedure of working with measured quantities instead of bare quantities

↑
too restrictive

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{CT}$$

e.g. $m^2 = m_R^2 - \delta m^2$ finite div.

$$m_R^2 = m_{ph}^2 \quad (m_{ph}^2 : \text{pole of the propagator})$$

: traditional view

즉 이 renormalized mass m_R 는 physical value로 해석할 수 없는 값이 있다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{CT} \\ &= \mathcal{L}'_R + \mathcal{L}'_{CT} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_{CT} \\ &= \mathcal{L}'_R + \mathcal{L}'_{CT} \end{aligned}} \right\} \quad \begin{aligned} m^2 &= m_R^2 - \delta m^2 \\ &= m_R'^2 + \delta m'^2 \end{aligned}$$

The same theory from the beginning.

m_R 을 어떻게 잡든 finite하게만 하면 같은 Green function을 얻을 수 있고 최종적으로 m_R 이 선택과 무관한 unique result를 얻게 된다.

바른 가리로 $\phi_R = Z_\phi^{-1/2} \phi$ 와 $g_R = Z_g^{-1} Z_\phi^2 g$ 인 Z_ϕ, Z_g 를 이용하여 바뀌는 divergence는 ϕ_R 와 g_R 의 값으로 된다.

$$\phi'_R = Z_\phi^{-1/2} \phi = \underbrace{\left(\frac{Z_\phi}{Z_\phi'} \right)^{1/2}}_{\text{finite}} \phi_R, \quad g'_R = \underbrace{\left(\frac{Z_g}{Z_g'} \frac{Z_\phi'^2}{Z_\phi^2} \right)}_{\text{finite}} g_R$$

이처럼 L 을 L_R 과 L_{CT} , L_{CT} 은 divergent quantity를
 infinite part와 finite part로 나누는 어떤 특정한 방법을
 "renormalization scheme (or renormalization prescription)"이라
 부른다.

Note

1. 따라서 당연히 무수히 많은 renorm scheme이 존재한다.
2. 이렇게 무수히 많은 scheme 중 어느 것을 고를 것인가는 우리가 고려하는
 물리 현상에 따라 달라진다.

e.g. mass-shell scheme
 minimal subtraction scheme

BPHZ scheme

⋮

(preserves many symmetries)
 e.g. gauge symmetry

가장 많이 사용하는 scheme은 dimensional regularization이라

minimal subtraction을 하는 것이다

Note

1. regularization과 scheme은 다르다.

e.g. dim. reg을 사용하러 mass-shell scheme을 적용하는 수도 있고
 cutoff reg을 " " " " " " 있다.

2. 어떤 경우에는 특정한 regularization이 scheme을 지정해준다
 라는 한 가지도 있다

$$\text{e.g. } \sum_{n=1}^{\infty} n = 5(6) = -\frac{1}{12}$$

3. 어떤 scheme을 사용하는 물리적인 결과도 바뀔 수 있다.

(full Lagrangian을 쓰기 때문에) 예를 들어 propagator pole의

위치는 renormalized mass를 무엇으로 정할지 문제였으나 m_{phys} 이다.

Minimal subtraction

dim. reg. 이라는 것은 divergent part Γ -factor pole로 나타낸다.
e.g.

$$V(s) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \underbrace{\Gamma(2-\frac{D}{2})}_{\downarrow \frac{2}{\epsilon} + \dots} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - x(1-x)p^2]^{2-D/2}}$$

$\epsilon = 4-D$

이때 Γ -factor pole part와 divergent part로 나뉘고, 이 둘
것을 minimal subtraction이라 한다.

이항 보정

$$m^2 = m_R^2 - \delta m^2$$

$$\delta m^2 = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{b_r(g)}{\epsilon^r}$$

$$g = \mu^{\epsilon} \left[g_R + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{a_r(g)}{\epsilon^r} \right]$$

$$\phi = \phi_R \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{c_r(g)}{\epsilon^r} \right]$$

이때 a_r, b_r, g_r 은 dimensionless이고 각각의 그래프 다른 dimensionful
quantity가 들어가 있지 않다. 순전히 g 만의 함수이다.

("mass-indep" scheme)

이때 각각의 항을 가지는 μ 라는 parameter가 있는 것을 제외하
한다. μ 는 본래 Lagrangian-의 mass parameter인 것이기
아닌데도, 질량 m 이 없기 때문에 μ 가 들어가야 하는 것일 수 있지만
사실은 그렇지 않고 물리적인 조건에 의해 정해진다. 예를 들어

physical mass가 m_{ph}^2 이라는 조건을 주면 μ 는 m_R 과 g_R, m_{ph}
함수로 결정된다. 그러므로 m_R 이 μ 에 함수라고 생각할 수도 있다

따라서 μ 를 바꾸는 것은 사실은 m 을 바꾸는 것에 해당하고
 달리 말하면 renormalization scheme을 바꾸는 것이다.
 (즉, 2ϵ 과 $2\epsilon_T$ 를 다른 방법으로 바꾸는 것)

결론적으로 minimal subtraction은 4개의 정해진 scheme을
 중다기 보다는 엄밀히 말해서 "one-parameter family of
 renormalization schemes"이라 할 수 있다.

⊙ Renormalization Group

이런 식인 데에 $\rightarrow$ scheme을 바꿀 때 m.g., Green fn 등이
 어떻게 바뀌는 가를 보는 것

여기서는 minimal subtraction에서 μ 를 변화시킬 때만은 살펴본다

μ : continuous parameter which must be physically
 unimportant

(e.g. m_{ph} does not change, $\frac{d}{d\mu} m_{ph} = 0$)

관측 theory를 정확히 할 수 있다면 μ 는 최종적인 결과에 전혀 영향을
 정확히 할지 몰라도 perturbation으로 처리 할 수 있는 한도에서
 실제 현상이므로 적당한 μ 를 잡아서 정확도가 높은 값을 구할 수 있다.

Consider bare Green fn

$G_N(p_i; g, m)$: indep. of μ by construction

$\Rightarrow \frac{d}{d\mu} G_N = 0$: This is essentially the RG eq.

Renormalized Green fn은 4+4+2

$G_N(p_i; g, m) = \sum_{\Gamma}^N G_{NR}(p_i; g(\mu), m(\mu), \mu)$

$$0 = \frac{d}{d\mu} G_N = \frac{N}{2} Z_4^{\frac{N}{2}-1} \frac{dZ_4}{d\mu} G_{NR} + Z_4^{\frac{N}{2}} \frac{d}{d\mu} G_{NR}$$

$$\therefore \underbrace{\frac{d}{d\mu} G_{NR}}_{||} = -\frac{N}{2} \frac{d \ln Z_4}{d\mu} G_{NR}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{dZ_4}{d\mu} \frac{\partial}{\partial g_R} + \frac{dm_K^2}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m_K^2} \right) G_{NR}$$

$$\therefore \left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g_R} + \gamma_m m_K^2 \frac{\partial}{\partial m_K^2} + N \gamma \right] G_{NR} = 0$$

$$\beta = \mu \frac{d g_R}{d \mu}$$

: RG equation

$$\gamma_m = \mu \frac{d \ln m_K^2}{d \mu} \quad \left. \vphantom{\gamma_m} \right\} \text{RG coefficients}$$

$$\gamma = \frac{1}{i} \mu \frac{d}{d \mu} \ln Z_4$$

To calculate these (in minimal subtraction), use the fact that bare parameters are "RG invariant".

$$g = \mu^\varepsilon \left[g_R + \frac{1}{\varepsilon} a_1(g_R) + \frac{1}{\varepsilon^2} a_2(g_R) + \dots \right]$$

$$0 = \mu \frac{dg}{d\mu} = \varepsilon \mu^\varepsilon [\quad] + \mu^\varepsilon \left[\mu \frac{dg_R}{d\mu} + \frac{1}{\varepsilon} a_1' \mu \frac{d}{d\mu} g_R + \dots \right]$$

$$0 = \varepsilon g_R + a_1 + \dots \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} a_1' + \dots \right) \mu \frac{dg_R}{d\mu}$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{dg_R}{d\mu} &= - \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} a_1' + \dots \right)^{-1} \left(\varepsilon g_R + a_1 + \dots \right) \\ &= -\varepsilon g_R - a_1 + g_R \frac{da_1}{dg_R} + (\text{negative powers of } \varepsilon) \end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ 인데 g_R 은 finite 라는 것 또는 negative power 는
사라지거나 작다 따라서 $\varepsilon \rightarrow 0$ 인데

$$\mu \frac{dg_R}{d\mu} = -a_1 + g_R \frac{da_1}{dg_R} = \beta(g_R)$$

2. Feynman diagram 을 계산하여 $\frac{1}{\varepsilon}$ 의 coefficient 를 구하면

β -function 을 구할 수 있다. g_R 이 4 가 되어 버리면 무한대까지로
계산 하면 된다.

Example 1-loop

$$a_1 \propto g_R^2 \Rightarrow g_R \frac{da_1}{dg_R} = 2a_1$$

$$\therefore \beta(g_R) = a_1(g_R)$$

For ϕ^4 theory, we find

$$\beta(g_R) = \frac{3}{16\pi^2} g_R^2 \quad ; \text{ exercise.}$$

Solve

$$\mu \frac{dg_R}{d\mu} = \beta(g_R) \quad \text{from our on}$$

$$\int_{g(\mu)}^{g(\mu')} \frac{dg}{\beta(g)} = \int_{\mu}^{\mu'} \frac{d\mu}{\mu} = \ln \frac{\mu'}{\mu}$$

For ϕ^4 -th. 1-loop,

$$-\frac{1}{g(\mu')} + \frac{1}{g(\mu)} = \frac{3}{16\pi^2} \ln \frac{\mu'}{\mu}$$

$$g(\mu') = \frac{g(\mu)}{1 - \frac{3}{16\pi^2} g(\mu) \ln \frac{\mu'}{\mu}}$$

이 식은 μ 를 다르게 잡았을 때 coupling const.가 어떻게 변하는가를 나타낸다

Note

1. For small $g(\mu)$,

$$g(\mu') \approx g(\mu) + \frac{3}{16\pi^2} g^2(\mu) \ln \frac{\mu'}{\mu} + O(g^3 (\ln \frac{\mu'}{\mu})^2)$$

(RG로써 perturbation을 가지고 얻을 수 있는)

RG를 가지고 얻은 결과는 불리장인 양이 renorm. scheme이

무관하다는, perturbation을 넣어서는 조건을 더 복잡하게 얻을

것이므로 그냥 perturbation을 계산한 것보다 더 나은 결과를 준다

2. μ 를 parameter 불리장 의미

μ : a characteristic momentum scale we would like to investigate

($\because$ Green fun $\sim$ contains $\ln p^2/\mu^2$ term

μ 보다 큰 scale의 fluctuation 등은 divergent 하다고 생각하여
배제한다.)

$p^2 \sim \mu^2$ 이면 $\ln$ term이 작고 Green func μ^2 에 $g(\mu)$
보통 함수로 나타낸다

momentum scale이 μ 보다 매우 크거나 작으면 $\ln$ term이
커져서 큰 결과를 주리 못한다. 이 때문에 μ 를 바꿔서 p 와
비슷한 크기로 만들면 그거에 $\ln$ term을 없애고 그 scale에 맞는
coupling 들로 불리장을 나타낼 수 있다. 이 과정에서 RG가
하는 역할을 보통의 perturbation을 넣어서 $\ln$ term의 effect를 무시하여
새로운 coupling을 찾아주는 것이다.

간단한 경우 β function의 모양에 따라 g 이 따르는 g 의 behaviour를 알아볼 수 있다.

Case (a)

양자색역학의 4th-th order loop 계산을

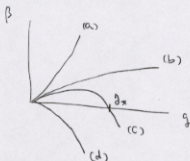
given $g(\mu)$, μ 에 대해 μ' 이 클수록

크면 $g(\mu') \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ perturbation breaks down

Moreover the theory itself might be ill-defined

YM theory는 레규라라이징 이론이 이점까지 도달한다



Case (b)

$g(\mu) \rightarrow \infty$ as $\mu \rightarrow \infty$ (e.g. $\beta(g) \sim bg^k$, $k < 1$)

finite scale에서는 g 가 계속 finite하므로 (a)의 경우와 같은 것은 아니다

Case (c)

$\beta(g) = 0$ 이 되는 $g = g_*$ 가 있다
 $\hookrightarrow$ "fixed point"

$\begin{cases} g < g_* : \frac{dg}{d\mu} > 0 \text{ 이므로 } \mu \text{가 증가함에 따라 } g \text{도 증가} \\ g > g_* : < 0 \text{ " " } g \text{도 감소} \end{cases}$

$g \approx g_*$ 일때 $\beta(g) \approx \alpha(g_* - g)$, $\alpha > 0$

이 근방에서는 $\int \frac{dg}{g_* - g} = \ln \mu^{\alpha + \text{const.}} \Rightarrow g = g_* - \mu^{-\alpha}$

$\mu \rightarrow \infty$ 일때 $g \rightarrow g_*$: "UV fixed point"

Case (d)

μ 가 증가할 때 g 는 감소 $\mu \rightarrow \infty \Rightarrow g \rightarrow 0$: "asymptotic freedom"

$\Rightarrow \mu$ 가 작을수록 perturbation이 작아짐

$g=0$ is UV fixed pt.

YM theory가 이점근에 수렴함

Now consider

$$\gamma = \frac{1}{2} \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z_4 \quad \sim \text{involves divergence}$$

change of $\mu \rightarrow \mu'$

$$\phi_R = Z_4^{-1/2} \phi \rightarrow \phi'_R = Z_4'^{-1/2} \phi = \underbrace{\left(\frac{Z_4'}{Z_4} \right)^{-1/2}}_{\text{finite} \approx 5^{-1}} \phi_R$$

$$\gamma(g(\mu')) = \frac{1}{2} \mu' \frac{d}{d\mu'} \ln \frac{Z_4(\mu')}{Z_4(\mu)} = \mu' \frac{d}{d\mu'} \ln \zeta(\mu', \mu)$$

$$\zeta(\mu', \mu) = \exp \int_{\mu}^{\mu'} \frac{d\mu}{\mu} \gamma(g(\mu))$$

$$= \exp \int_{g(\mu)}^{g(\mu')} dg \frac{\gamma(g)}{\beta(g)}$$

예) $g = g_n$ is UV fixed pt. is zero (acc.), $\mu' \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$\gamma(g) \approx \gamma(g_n) + \gamma_1(g - g_n) + \dots$$

$$\begin{aligned} \zeta(\mu', \mu) &\approx \exp \left\{ \gamma(g_n) \int_{\mu}^{\mu'} \frac{d\mu}{\mu} + \dots \right\} \\ &= e^{\gamma(g_n) \ln \mu' / \mu} = \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^{\gamma(g_n)} \end{aligned}$$

$$\frac{Z_4'}{Z_4} \phi'_R \approx \left(\frac{\mu'}{\mu} \right)^{-\gamma(g_n)} \phi_R \quad \gamma(g_n) : \text{"anomalous dim"}$$

$$G_N(P_i; g(\kappa, \mu); m(\kappa, \mu), \kappa, \mu) = \zeta(\kappa, \mu)^N G_N(P_i; g(\mu), m(\mu), \mu)$$

dimensional analysis $\kappa \rightarrow \infty$ limit

$$G_N(\kappa P_i; g(\kappa, \mu), m(\kappa, \mu), \kappa, \mu) = \kappa^{\dim G} G_N(P_i; g(\kappa, \mu), \underbrace{m(\kappa, \mu)}_0, \mu)$$

$$\therefore G_N(\kappa P_i; g(\mu), m(\mu), \mu) = \zeta(\kappa, \mu)^N G_N(\kappa P_i; g(\kappa, \mu), m(\kappa, \mu), \kappa, \mu) \\ \approx \kappa^{\dim G} \zeta(\kappa, \mu)^N G_N(P_i; g(\kappa, \mu), 0, \mu)$$

if $\exists$ fixed pt $g = g_*$, $\zeta(\kappa, \mu) = \kappa^{r(g_*)}$

$$\Rightarrow G_N(\kappa P_i; g(\mu), m(\mu), \mu) \approx \kappa^{\dim G + N r(g_*)} G_N(P_i; g_*, 0, \mu)$$

3, UV region에서 Green fun- additional dim. $N r(g_*)$ 가
있는 것이지 scale, 어떤 coupling 은 g_* 가 된다.

Note

1. Λ : UV cutoff.

$$\underbrace{\Lambda^{r(g_*)} \phi}_{\text{divergent}} = \underbrace{\mu^{r(g_*)} \phi_R}_{\text{bare field; divergent}} : \text{finite}$$

finite 는 physical quantity 는 반드시 실험하는 것임

$\mu^{r(g_*)}$ 라는 "dimensional" quantity가 붙어있다

붙은 dimension 이어서 "anomalous" dimension 이 된다.

2. UV region에서 g_* : a fixed numerical number
 $\Rightarrow$ no free parameter in Green fun-
"universality"

In QCD,

$$\beta = -\frac{g^3}{4\pi^2} \left(\frac{11}{4} - \frac{1}{6} n_f \right)$$

$$\Rightarrow \alpha_s(\mu) \approx \frac{g^2(\mu)}{4\pi} = \frac{12\pi}{(33-2n_f) \ln(\mu^2/\Lambda^2)} \quad \text{! exercise.}$$

Λ : RG-inv. const.

dimensional transmutation

⊙ Wilsonian Renormalization Group

• Renormalizability $\rightarrow$ physically important?

QED, Electro-weak, QCD : all renormalizable.

Why?

혹시 이론이 기본적으로 가져야 할 성질로 판정되어야 하는가?

(e.g. Causality, relativity, ...)

But it is just a "technical" procedure to get finite results out of badly divergent expressions.

Answer : Wilsonian picture of renormalization

Effective field theory

- 어떤 이론 (예를 들면 QED, QCD, etc.)이 renormalizable 하기 cutoff를 어느 정도까지 낮추는 한계가 있는지를 판정할 수 있고, 어떤 이론은 그 이론이 아직 고려하지 않았던 것까지 포함한 것이라도 기하학적으로 간단하다. 따라서 어떤 characteristic scale이 존재하여 그 영역 이상에서는 어떤 다른 이론이 지배하게 된다.

2 scale 아래에서는 QED, QCD 등이 작은 발산이 없으므로 <보통> 할 수 있는데 이러한 characteristic scale로 UV cutoff를 도입할 수 있다.

→ 사실은 이런 상수는 1930~40년대에 renormalization을 연구하던 사람들이 본래부터 가지고 있었다.

Natural question

cutoff 이상이 되는 영역에서 얻은 결과를 어떻게 하여 우리가 원래 고려하고 있는 이론에 포함시킬 수 있을까?

→ 1st step : cutoff를 변화시켜가면서 이론이 어떻게 변해가나 하는 것을 본다.

change of cutoff $\Rightarrow$ change of $\overset{\text{bare}}{V}_{\text{coupling}}$ constants
to give the same physical results

$g(\Lambda)$, $m(\Lambda)$... Λ : UV cutoff

e.g.
 m_{phy}^2 : function of $\underbrace{m, g, \Lambda}_{\text{bare parameters}}$
 $m_{\text{phy}}^2 = m_{\text{phy}}^2(m, g, \Lambda)$: a fixed physical quantity
 indep. of Λ
 determined by experiment.
 $\Rightarrow m, g$ 가 Λ 에 따라 변해야만 한다.

이러한 UV cutoff를 변화시키면서 coupling & field, 혹은 action 자체가 어떻게 변해나가는 것을 알아보는 것을 Wilsonian approach to renormalization이라 한다.

Note 말하듯이 각각 RG라는 경로를 따서 비틀리지만 타자는 매달 다른다.

이 식에서 $\hat{S}_{\text{eff}}[\phi]$ 는 UV cut-off가 1인 어떤 이론의 action이다.

해석할 수 있다. 그리고 이것은 energy scale이 1보다 작은
현상에 관한 한 리프 theory $\hat{S}[\phi]$ 와 완전히 같은 결과를 준다.

$\therefore$ 같은 generating functional $Z[J]$, 즉 같은 Green function을
측기 때문

이것을 Wilsonian effective action이라 한다.

cut-off를 Λ 에서 아주 infinitesimal 하게 $\Lambda-d\Lambda$ 로 바꿨다면

effective action도 바뀔다:

$$\hat{S}_{\text{eff}}^{\Lambda} \rightarrow \hat{S}_{\text{eff}}^{\Lambda-d\Lambda} \equiv \hat{S}_{\text{eff}}^{\Lambda} - d\hat{S}_{\text{eff}}^{\Lambda}$$

따라서 Λ 에 대한 Set 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\Lambda \frac{d\hat{S}_{\text{eff}}^{\Lambda}}{d\Lambda} = F[\hat{S}_{\text{eff}}^{\Lambda}] : \text{some complicated function}$$

↑
"Wilsonian RG equation"

(or flow eq., exact RG eq.)

Let's derive $F[S]$.

Note

1. Work in Euclidean space from now on. (Wick rotation)

2. Keep J nonzero with which we will get new interpretation
on $\hat{S}_{\text{eff}}$.

Action = interaction part + free part 4421

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int \phi D^{\Lambda_0} \phi + S_{\text{int}}^{\Lambda_0}[\phi]$$

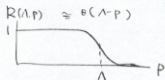
D^{Λ_0} : free propagator with UV cutoff Λ_0

Divide propagator into two part

$$D^{\Lambda_0} = D^{\Lambda} + D_{\Lambda}^{\Lambda_0}$$

$\uparrow$ $\nwarrow$
 low energy high energy
 part part.

i.e., $D^{\Lambda} = \frac{R(\Lambda, p)}{p^2 + m^2}$



$$Z[J] = \int [D\phi] [D\phi_H] e^{-\frac{1}{2} \phi_L D^{\Lambda} \phi_L - \frac{1}{2} \phi_H D_{\Lambda}^{\Lambda_0} \phi_H - S_{\text{int}}^{\Lambda_0}[\phi_L + \phi_H] + J(\phi_L + \phi_H)}$$

$$= \int [D\phi] e^{-\frac{1}{2} \phi D^{\Lambda} \phi - W^{\Lambda}[\phi, J]}$$

where

$$e^{-W^{\Lambda}[\phi, J]} = \int [D\phi_H] e^{-\frac{1}{2} \phi_H D_{\Lambda}^{\Lambda_0} \phi_H - S_{\text{int}}^{\Lambda_0}[\phi + \phi_H] + J(\phi + \phi_H)} \quad \dots \textcircled{2}$$

Note if $\phi_L = 0$,

$e^{-W^{\Lambda}[0, J]}$: generating functional of theory

with both $\begin{cases} \text{UV cutoff } \Lambda_0 \\ \text{IR cutoff } \Lambda \end{cases}$

(Notice that the propagator is $D_{\Lambda}^{\Lambda_0}$)

Change of variable $\phi_H = \phi - \phi_L$

$$-\frac{1}{2} \phi_H D_A^{\Lambda^{-1}} \phi_H = -\frac{1}{2} \phi D_A^{\Lambda^{-1}} \phi - \frac{1}{2} \phi_L D_A^{\Lambda^{-1}} \phi + \phi D_A^{\Lambda^{-1}} \phi_L$$

$$\Rightarrow e^{-W^\Lambda[\phi_L, J]} = e^{-\frac{1}{2} \phi_L D_A^{\Lambda^{-1}} \phi_L} \int [D\phi] e^{-\frac{1}{2} \phi D_A^{\Lambda^{-1}} \phi - S_{int}^\Lambda(\phi) + \underbrace{(J + D_A^{\Lambda^{-1}} \phi_L) \phi}_{\tilde{J}}}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Quadratic} \\ \text{term} \end{array} \right) = -\frac{1}{2} (\phi - \tilde{J} D_A^\Lambda) D_A^{\Lambda^{-1}} (\phi - D_A^\Lambda \tilde{J}) + \frac{1}{2} \tilde{J} D_A^\Lambda \tilde{J}$$

$$-\frac{1}{2} \phi_L D_A^{\Lambda^{-1}} \phi_L = -\frac{1}{2} (\tilde{J} - J) D_A^\Lambda (\tilde{J} - J)$$

$$= -\frac{1}{2} \tilde{J} D_A^\Lambda \tilde{J} + \underbrace{J D_A^\Lambda \tilde{J} - \frac{1}{2} J D_A^\Lambda J}_{\text{II}}$$

$$\frac{1}{2} J D_A^\Lambda J + J \phi_L$$

$$\therefore e^{-W^\Lambda[\phi_L, J]} = e^{\frac{1}{2} J D_A^\Lambda J + J \phi_L} \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \tilde{J} D_A^\Lambda \tilde{J}} e^{-S_{int}^\Lambda\left[\frac{\tilde{J}}{1-JJ}}\right] e^{\frac{1}{2} \tilde{J} D_A^\Lambda \tilde{J}}}_{\text{III}} e^{\frac{1}{2} \tilde{J} D_A^\Lambda \tilde{J}}$$

$$S_{int}^\Lambda[\phi_L + D_A^\Lambda J]$$

Then we obtain

$$Z[J] = \int [D\phi_L] e^{-\frac{1}{2} \phi_L D_A^{\Lambda^{-1}} \phi_L - S_{int}^\Lambda[\phi_L + D_A^\Lambda J] + J \phi_L + \frac{1}{2} J D_A^\Lambda J}$$

$$\text{if } J = J_L \text{ (} J_H = 0 \text{)}, \Rightarrow D_A^\Lambda J = 0,$$

$$S_{int}^\Lambda[\phi_L + D_A^\Lambda J] = S_{int}^\Lambda[\phi_L]$$

$\therefore S_{int}^\Lambda[\phi]$ 가 Wilsonian effective action 이다.

RG equation 을 구하기 위해 앞 page의 (*)에서 $\phi_L = 0$ 로 두고 미분하면

$$\frac{d}{d\Lambda} e^{-W^\Lambda[0, J]} = -\frac{1}{2} \frac{J}{\delta J} \left(\frac{d}{d\Lambda} D_A^{\Lambda^{-1}} \right) \frac{\delta}{\delta J} e^{-W^\Lambda[0, J]}$$

그러면

$$W^{\Lambda}[\phi_c, J] = \frac{1}{2} J D_{\Lambda}^{-1} J + J \phi_c + S_{int}^{\Lambda}[\phi_c + D_{\Lambda}^{-1} J] \quad \dots (*)$$

이므로 이 미분방정식은 S_{int}^{Λ} 에 대한 식으로 쉽게 바꿀 수 있다.

$$\frac{d S_{int}^{\Lambda}}{d \Lambda}(\phi) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d D^{\Lambda}(p)}{d \Lambda} \left[\frac{\delta^2 S_{int}^{\Lambda}}{\delta \phi(p) \delta \phi(-p)} - \frac{\delta S_{int}^{\Lambda}}{\delta \phi(p)} \frac{\delta S_{int}^{\Lambda}}{\delta \phi(-p)} \right]$$

Wilsonian RGE : exact equation
(Exact) : exercise

Is there any simple connection of Wilsonian effective action with conventional QFT quantities?

From (*),

$$W^{\Lambda}[0, J] = \frac{1}{2} J D_{\Lambda}^{-1} J + S_{int}^{\Lambda}[D_{\Lambda}^{-1} J]$$

↑
Generating functional
of connected Green fns
with IR cutoff Λ

↑
Wilsonian effective action
with UV cutoff Λ

$$\left. \frac{\delta^n S_{int}^{\Lambda}[\phi]}{\delta \phi(p_1) \dots \delta \phi(p_n)} \right|_{\phi=0} = \underbrace{\prod_{i=1}^n D_{\Lambda}^{-1}(p_i)}_{\text{amputated}} \underbrace{\left. \frac{\delta^n W^{\Lambda}[J]}{\delta J(p_1) \dots \delta J(p_n)} \right|_{J=0}}_{\text{connected Green fn}}, n \geq 2$$

따라서 Wilsonian effective action은 다음과 같이 바꿀 수 있다.

- (i) low-energy effective action with UV cutoff Λ
- (ii) generating ftnl of amputated connected Green fn with IR cutoff Λ
($\hookrightarrow$ 보 ϕ_c 의 QFT formalism으로 직접 바꿀 수 있다)

$\therefore$ Wilsonian effective action이 $\Lambda \rightarrow 0$ 으로 갈수록 physical Green functions을 직접 구할 수 있다.

Expand $\hat{S}_{int}$ in terms of (infinitely many) local operators

$$\hat{S}_{int} = \sum_i \int d^4x \, g_i O_i \quad O_i : (\partial\phi)^4, \phi^4, \phi^6 (\partial^2\phi)^2 \text{ etc}$$

"coupling constants"

From exact RGE, we can obtain equations for coupling const. g_i ($\Rightarrow$ connection to ordinary RG eq.)

e.g. scheme independence of β -fun : exercise.

Infinitely many term in $\hat{S}$.

$\Rightarrow$ Which terms are important?

Count dimensions!

operator O_i of dimension δ_i (e.g. $[O_i] = \delta_i$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{e.g. } [\phi] = 1 \Rightarrow [\partial^m \phi^n] = n - m \end{array} \right\}$$

action is dimensionless $\Rightarrow [g_i] = 4 - \delta_i$

$\Rightarrow$ Define dimensionless couplings λ_i by writing

$$g_i = \lambda_i \Lambda^{4-\delta_i}$$

$$\Rightarrow \hat{S} = \sum_i \lambda_i \Lambda^{4-\delta_i} \int d^4x \, O_i$$

이때 Λ 는 UV cutoff $\hat{S}$ 의 characteristic scale이므로 λ_i 는 1 근처의 숫자인 것임. energy scale이 E 인 process는 E 와 같은 scale을 가진 O_i 는 E^{δ_i} 의 scale이므로

$$g_i \int d^4x \, O_i \sim \lambda_i \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^{\delta_i - 4}$$

$\approx$ UV cutoff가 Λ 일 때 $\int d^4x \, O_i$ term에 $\frac{E^{\delta_i - 4}}{\Lambda^{\delta_i - 4}}$ 의 effect를 준다.

$\delta_i > 4 \Rightarrow$ low energy에서 (즉, E 가 작아질수록) 덜 중요해진다
"irrelevant" $\leftrightarrow$ nonrenormalizable

$\delta_i = 4 \Rightarrow$ "marginal" $\leftrightarrow$ renormalizable

$\delta_i < 4 \Rightarrow$ "relevant" $\leftrightarrow$ superrenormalizable

따라서 Wilsonian picture에서 보면 nonrenormalizable term 들은 low energy에서 물리적으로 중요하지 않은 것은 알 수 있다.

Action S로 주어지는 어떤 이론이, initial UV cutoff Λ_0 이하에서 잘 맞는 이론이라 하자. 그러면 뒤에 analysis가 말하는 바는 S에 nonrenormalizable term 들이 들어있어도 Λ_0 보다 매우 작은 energy scale process에는 거의 영향을 주지 못한다는 것이다. 이를 달리 말하면, low energy process를 기술하는데는 (super-) renormalizable term들로 충분하다는 뜻이다. 바로 이것이 QED나 QCD 등이 자연을 기술하는 이론이 거의 모두 renormalizable theory인 것을 잘 설명해준다.

Note

1. nonrenormalizable term이 중요해지는 경우도 있다
어떤 이유에서든 (e.g. symmetry) renormalizable term 자체가 존재하지 않는 경우. 예를 들면 weak interaction의 low energy effective theory인 Fermi theory
2. diagram을 계산해보거나 하면 nonrenormalizable term에 의해 UV cutoff Λ_0 의 positive power contribution이 나옴 경우도 있다.
그러나 이런 경우는 모두 renormalizable term의 coefficient를 바꾸는 역할을 할 뿐이다

3. conventional QFT view: nonrenormalizable term이 문제

effective theory view: (super) renormalizable term이 문제

e.g. mass term

(natural mass) $\sim$ UV cutoff scale

그러면 원래 mass는 cutoff 기 비례 하여 작다.

이것을 바꾸기 위해서는 아주 큰 -1까지 UV cutoff 보다

매우 작은 mass가 4세기 911GeV의 bare parameter는

매우 미세하게 조정해야만 한다.

$\rightarrow$ "fine tuning problem"

$$m_{\text{phy}}^2 = m^2 + S m^2 \quad \rightarrow \text{contains } \Lambda^2 \text{ term}$$

$\uparrow$
이 둘이 합쳐져서 Λ^2 과 근사한
매우 작은 양을 만들어야 한다

4. Effective theory의 관점에서는 어떤 이론이든 매우 높은 에너지까지

다 맞는 것이 아니고 제한된 영역에서만 작동되며 이더러 정확도를

가지고 현상을 예측하지도 못한다. 정확도를 높이기 위해서는

action이 irrelevant (즉, nonrenormalizable) term들은 더해야

한다. 예를 들어 ϕ^4 theory는 $(\frac{h}{\Lambda})^2$ 의 차이를 극복하여 기술되지

못하며 정확도를 높이려면 ϕ^6 같은 dimension 6 operator를 고려해야 한다

5. 어떤 이론이 질량이 매우 무거운 field (M)과 가벼운 field (m)으로 이루어져

있을 때 낮은 에너지 영역에서 가벼운 입자가 일드리는 현상은 무거운

입자는 거의 영향을 주지 않는다. 즉, 무거운 입자의 존재 여부는 대략적

으로 가벼운 입자만을 이론을 만들 수 있다. ("decoupling theorem")

: string theory는 본래도 Nonrenormalizable 이론이지만 기술할 수 있는 이유

거기, low energy process에서는 high energy의 이론을 근사가 된다고